भारतीय कृषि अनुसंधान पत्रिका, 32(2), **146-148**, 2017

द्विचर एक्सपोनेन्सियल मॉडल हेतु डी–ऑप्टिमल संतृप्त अभिकल्पना

श्वेतांक लाल, सीमा जग्गी, सिनी वर्गीस, एल्दो वर्गीस एवं अर्पण भौमिक

भा.कृ.अनु.प.–भारतीय कृषि सांख्यिकी अनुसंधान संस्थान, नई दिल्ली – 12

प्राप्त : मार्च, 2017 **स्वीकृत : जून, 2017**

सारांश

कृषि तथा उद्योग संबंधी कई प्रयोगों में अरैखिक मॉडल पर आधारित अभिकल्पनाओं की आवश्यकता होती है। प्रायोगिक अभिकल्पना के साहित्य में एक चल युक्त अरैखिक मॉडल पर विस्तृत उल्लेख उपलब्ध है परंतु चलों एवं प्राचलों की संख्या में वृद्धि से अभिकल्पना निर्माण प्रक्रिया और अधिक जटिल हो जाती है व संबंधित साहित्य भी विरल है। इसका मुख्य कारण अवगम आव्यूह के संरचना की जटिलता तथा संगणात्मक मूल्य में बढोत्तरी है। प्रस्तुत लेख में फेडोरोव विनिमय कलन विधि की सहायता से दो चर युक्त एक्सपोनेन्सियल मॉडल हेतु डी–ऑप्टिमल संतृप्त अभिकल्पना विकसित की गई है।

Bhartiya Krishi Anushandhan Patrika, 32(2), **146-148**, 2017

D-OPTIMAL SATURATED DESIGN UNDER A TWO VARIABLE EXPONENTIAL MODEL

Shwetank Lal, Seema Jaggi, Cini Varghese, Eldho Varghese and Arpan Bhowmik

ICAR - Indian Agricultural Statistics Research Institute, Library Avenue, New Delhi - 12

ABSTRACT

Many experimental situations in agricultural and industrial studies require designs under nonlinear setup. Available literature mostly explores experimental designs for nonlinear models with one variable only. With the increase in number of parameters and variables in the model, design constructions becomes more difficult becasue of complex structure of information matrix and incresased computational costs. In this paper D-optimal saturated design under a two variable exponential model has been obtained using Federov exchange algorithm.

प्रस्तावना

अनुक्रिया सतह कार्य प्रणाली/रेस्पोन्स सर्फेस मेथडोलोजी (आर.एस.एम.) का उपयोग प्रक्रिया व उत्पाद इष्टतमकरण हेतु कृषि तथा उद्योग संबंधी कई प्रयोगों में किया जाता है। आर.एस.एम. का उद्देश्य है सर्वोत्कृष्ट अनुक्रिया के लिए उत्तरदायी आयत चर व्यवस्था की पहचान करना तथा अनुक्रिया और आयत चरों के संबंध को प्रेषित करने वाले मॉडल का निर्माण करना है।

आमतौर पर रैखिक समाश्रयण का द्वितीय अनुक्रम मॉडल अनुक्रिया–आयत चर संबंध को प्रेषित करने के लिए पर्याप्त होता है। तथापि कई अध्ययन में अंतर्निहित मॉडल रैखिक नहीं होते हैं साथ ही कुछ अध्ययन में भूतपूर्व प्रयोगों के आधार पर अरैखिक मॉडल रैखिक की तुलना में उपयुक्त प्रतीत होते हैं। खुरी एवं कॉर्नेल (1996) ने आर.एस.एम. के अंतर्गत दो चरण परिभाषित किये। प्रथम चरण में अनुक्रिया–आयत चर संबंध को प्रेषित करने वाले उचित सांख्यिकीय मॉडल की पहचान की जाती है और तत्पश्चात् प्रायोगिक अभिकल्पनाओं की रचना की जाती है। द्वितीय चरण में सर्वोत्कृष्ट अनुक्रिया के लिए उत्तरदायी आयत चर व्यवस्था का आंकलन किया जाता है। प्रस्तुत लेख आर.एस.एम. के प्रथम चरण पर केन्द्रित है। अरैखिक परिस्थिति में प्रायोगिक अभिकल्पना की रचना चुनौतीपूर्ण है। सर्वप्रथम चुनौती प्राचल आंकलन के अवगम आव्यूह की प्रारंभिक प्राचल अनुमान पर निर्भरता से संबंधित है। प्रारंभिक प्राचल अनुमान की प्राप्ति भूतपूर्व प्रयोगों के परिणाम अथवा प्रयोगकर्ता के अनुभव के द्वारा की जा सकती है। एक अन्य चुनौती अवगम आव्यूह की जटिल संरचना है। यह संरचना अंतर्निहित मॉडल से संबंधित है।

अर्थात प्रत्येक मॉडल के लिए विशेष रूप से उपगम आव्यूह वयुतपादित करना पड़ता है। साथ ही सतत अभिकल्पना चर क्षेत्र संगणक आधारित कलन विधि की जटिलता बढ़ाता है। अंततः निर्मित अभिकल्पना की सर्वश्रेष्ठता (ऑप्टीमैलिटी) सिद्ध करने की आवश्यकता होती है।

प्रायोगिक अभिकल्पना का अरैखिक परिस्थिति में स्वरूप

ऐटकिन्सन एवं अन्य (2007) का अनुसरण करते हुए एक सामान्य मॉडल को निम्नलिखित समीकरण से परिभाषित कर सकते हैं।

$$y = \eta(x, \theta) + \varepsilon$$

जहाँ y अनुक्रिया है, $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2 I)$ त्रुटि है, x आयत चरों का सदिश है, $\eta(x, \theta), y$ तथा x के संबंध को परिभाषित करने वाला फलन है और θ अज्ञात प्राचलों का सदिश है। आधार बिन्दु (x_i' s) तथा भार (w_i' s) के साथ (1) के लिए प्रायोगिक अभिकल्पना को इस तरह व्यक्त करते हैं :

यहाँ प्रायोगिक रनों अथवा प्रायोगिक इकाईयों पर प्रयुक्त आयत चरों के संयोजन को आधार बिन्दु कहते हैं और प्रत्येक आधार बिन्दु के आपेक्षिक अनुपातिक प्रतिरूप (रेप्लीकेशन) को भार कहते हैं जहाँ $w_i \in [0, 1]$ तथा $\sum_{i\backslash 1}^{n} w_i = 1$ । माना कि $r_i = w_i N$ जहाँ N प्रायोंगिक इकाईयों की कुल संख्या है। अभिकल्पना ξ सटीक (एक्सैक्त) अभिकल्पना कहलायेगी अगर r_i एक पूर्णांक होगा अथवा सतत अभिकल्पना कहलायेगी।

एक प्रायोगिक अभिकल्पना ξ के लिए फिशर अवगम आव्यूह इस तरह परिभाषित करते हैं :

(3)

$$M(\xi, \theta) = \sum_{i=1}^{m} \left[\frac{\partial \eta(x, \theta)}{\partial \theta'} \right] \left[\frac{\partial \eta(x, \theta)}{\partial \theta'} \right]' w_i \qquad (4)$$

जहाँ χ अभिकल्पना क्षेत्र है।

एक अभिकल्पना बिन्दु के लिए मानकीकृत प्रसरण फलन (स्टैडर्डाइज्ड वैरियंस फंक्शन) का परिकलन सूत्र निम्न है :

(5)

$$d(\xi, x) = f(x)' M^{-1}(\xi, \theta) f(x) \qquad (6)$$

डी ऑप्टीमल संतृप्त अभिकल्पना

अभिकल्पना ξ^* को डी-आप्टीमल कहा जाता है यदि उसके अवगम आव्यूह के निर्धारक का मान सभी अभिकल्पनाओं के तुलना में सर्वाधिक हो। सिल्वी (1980) ने सिद्ध किया कि डी-ऑप्टीमल संतृप्त अभिकल्पना के सभी आधार बिन्दुओं का भार समान होता है। अगर किसी अभिकल्पना के आधार बिन्दुओं की संख्या मॉडल में अज्ञात प्राचलों की संख्या के बराबर है तो उसे संतृप्त अभिकल्पना कहेंगे।

प्रस्तुत लेख में हमने अरैखिक समाश्रयण मॉडल के लिए एक डी-ऑप्टीमल संतृप्त अभिकल्पना विकसित की है। इस अभिकल्पना की रचना फेडेरोव विनिमय कलन विधि (फेडेरोव, [illegible]) [illegible] अभिकल्पना के सर्वश्रेष्ठता (ऑप्टीमैलिटी) को सिद्ध करने के लिए सामान्य समानक प्रमेय (जेनेरल इक्विवैलेंस थ्योरम) का प्रयोग किया गया है। फेडेरोव विनिमय कलन विधि की संकेत-लिपि परिशिष्ट में संलग्न है।

सामान्य समानक प्रमेय (व्हाईट, 1973) (व्हीट्टल, 1973) के अनुसार किसी अभिकल्पना अपवर्तक के वर्ग H में यदि अभिकल्पना * निम्नलिखित तीन कथनों में से किसी भी एक कथन को सत्यापित करती है तो अभिकल्पना ξ^* द्वारा तीनों कथन समान रूप से सत्यापित होते हैं।

(i) ξ^* के लिए का मान अधिकतम होगा।

(ii) ξ^* के लिये का मान न्यूनतम होगा।

(iii) $\max_{x \in \xi} d(x, \xi) = k$

जहाँ k मॉडल में अज्ञात प्राचलों की संख्या है।

उदाहरण : दो सतत चल युक्त ऐक्सपोनेंशियल मॉडल

दो चल तथा चार प्राचल युक्त ऐक्सपोनेंशियल के औसत अनुक्रिया की परिभाषा इस प्रकार है।

$$\eta(x) = \exp(\theta_0 + \theta_1 x_{1i} + \theta_2 x_{2i} + \theta_3 x_{1i} x_{2i})$$

$$x_1 \in [-1, 1],\ x_2 \in [-1, 1]$$

संबंधित अवगम आव्यूह को निम्न रूप में व्यतुपादित किया जा सकता है :

$$M(\xi,\theta)=\sum_i Z_i^2\begin{bmatrix} 1 & x_{1i} & x_{2i} & x_{1i}x_{2i} \\ x_{1i} & x_{1i}^{\ 2} & x_{1i}x_{2i} & x^2{}_{1i}x_{2i} \\ x_{2i} & x_{1i}x_{2i} & x_{2i}^2 & x_{1i}x^2{}_{2i} \\ x_{1i}x_{2i} & x_{1i}^{\ 2}x_{2i} & x_{1i}x^2{}_{2i} & x_{1i}^{\ 2}x^2{}_{2i} \end{bmatrix}$$

जहाँ, $z_i=\theta_0+\theta_1+\theta_1x_{1i}+\theta_2x_{2i}+\theta_3x_{1i}x_{2i}$

माना कि प्रारंभिक प्राचल आकल है –

t0=2, t1=1, t2 = 1 t3 = 0,5

फेडेरोव विनिमय कलन विधि से प्राप्त डी–ऑप्टिमल संतृप्त अभिकल्पनाओं को तालिका–1 में प्रस्तुत किया गया है। इस अभिकल्पना के अवगम आव्यूह के निर्धारक का मान 65.7587 है।

तालिका–1 : डी ऑप्टिमल अभिकल्पना

x_1	x_2
1	1
-0.5008	-0.5008
1	-0.4992
-0.4992	1

प्राप्त अभिकल्पना की सर्वश्रेष्ठता सिद्ध करने हेतु सामान्य समानक प्रमेय के अंतर्गत सम्पूर्ण अभिकल्पना क्षेत्र ग्रिड के मानकीकृत प्रसरण फलन की परिकलन की गई, जो कि चित्र–1 में आलेखित है। समस्त अभिकल्पना क्षेत्र के मानकीकृत प्रसरण फलन का मान 4 से कम है तथा प्राप्त अभिकल्पना के आधार बिन्दुओं पर यह मान 4 के बराबर है। प्रस्तुत उदाहरण में चार अज्ञात प्राचल है।

निष्कर्ष

अरैखिक परिस्थिति में प्रायोगिक अभिकल्पना की रचना चुनौतिपूर्ण है। आयत चल की संख्या में वृद्धि के साथ अभिकल्पना रचना और अधिक जटिल एवं विकट हो जाती है। ऐसी स्थिति में फेडेरोव विनिमय जैसे कलन विधि अति उपयोगी है। विधि अनुसार समस्त प्रत्याशी अभिकल्पना बिन्दुओं का ग्रिड बनाया जाता है। इस ग्रिड में उपयुक्त बिन्दुओं के समूह को ढूंढा जाता है। इस तरह से प्राप्त अभिकल्पना की सर्वश्रेष्ठता स्वसिद्ध नहीं होती। अत: प्राप्त अभिकल्पना की सर्वश्रेष्ठता का समान्य समानक प्रमेय से परीक्षण किया जाता है।

संदर्भ

Atkinson, A.C., Donev, A.N. and Tobias, R. (2007). Optimum experimental designs with SAS, Oxford University Press, Oxford.

Fedorov, V.V. (1972). Theory of Optimum Experiments, New York : Acedemic Press.

Khuri, A.I. and Cornell, J.A. (1996). Response Surfaces : Designs and Analysis. CRC press.

Silvey, S.D. (1980). Optimum Design. Chapman and Hall, London.

White, L.V. (1973). An extension of general equivalence theorem to nonlinear models. *Biometrika.* 60(2), 345-348.

Whitte, P. (1973). Some general points in the theory and of optimal experimental designs, *Journal of the Royal Statistical Society. Series B,* 35, 123-130.