RESEARCH ARTICLE Bhartiya Krishi Anusandhan Patrika, Volume Issue : ()

परस्पर लाम्बिक लेटिन वर्गों का उपयोग करते हुए आंशिक संतुलित 3–अभिकल्पनाएं

सांयतनी कर्माकर[1], सिनी वर्गीस[1], सीमा जग्गी[2], मो० हारुन[1], देवेन्द्र कुमार[1] 10.18805/BKAP351

सारांश

t–अभिकल्पनाएं संतुलित अपूर्ण खण्ड अभिकल्पनाओं की एक सामान्यीकृत श्रेणी निरुपित करती है जिसमें खण्डों की संख्याएं, जिनमें कोई t उपचार ($t \geq 2$) साथ–साथ होते हैं, नियत हैं। अपूर्ण खण्ड अभिकल्पनाओं के अन्य परिवारों की तरह t–अभिकल्पनाओं का फसल प्रणाली अनुसंधान में प्रमुख अनुप्रयोग पाया जाता है जहाँ पर मुख्य सरोकार एक विशिष्ट कृषि परिस्थितियों हेतु t–अवयव फसल प्रणालियों के किसी विशेष समुच्चय से उत्कृष्ट संयोग का चयन करना होगा। किन्तु t–संतुलन प्राप्त करने के लिये हमें बड़ी संख्या में खण्डों एवं प्रतिकृतियों की आवश्यकता होगी। आंशिक संतुलित t–अभिकल्पनाओं का समावेश उन परीक्षाणात्मक परिस्थितियों में किया गया जहाँ t–संतुलित अभिकल्पनाएं संभव नहीं हैं। आंशिक संतुलित 3–अभिकल्पनाओं की एक श्रेणी की संरचना परस्पर लाम्बिक लेटिन वर्गों का उपयोग करते हुए की गई। इन अभिकल्पनाओं में हालांकि युग्मित संतुलन होता है, 3–टपल्स के पदों में संयोजन तौर पर संतुलित नहीं हैं। ये 3–पैकिंग अभिकल्पनाओं के गुणों को भी संतुष्ट करता है। इन अभिकल्पनाओं का दक्षता घटक बहुत अधिक होता है क्योंकि जैसे–जैसे v बढ़ता है वैसे–वैसे दक्षता बढ़ती है।

शब्द कुंजीः संतुलित अपूर्ण खण्ड अभिकल्पनाएं, प्रामाणिक दक्षता घटक, परस्पर लाम्बिक लैटिन वर्ग, t–पैकिंग।

Partially Balanced 3-Designs using Mutually Orthogonal Latin Squares

Sayantani Karmakar[1], Cini Varghese[1], Seema Jaggi[2], Mohd Harun[1], Devendra Kumar[1]

ABSTRACT

t-designs represent a generalized class of balanced incomplete block designs in which the number of blocks in which any t treatments ($t \geq 2$) occur together is a constant. Like other families of incomplete block designs, t-designs find potential application in farming system research where the main concern would be to select the best combination out of a certain set of t-component farming systems for a specific agro-ecological zone. But in order to obtain t-balance we may require large number of blocks and replications. Partially balanced t-designs are introduced for experimental situations where it is not possible to get t-balanced designs. A series of partially balanced 3-designs are constructed using mutually orthogonal Latin Squares. These designs, though possess pair-wise balance, are not combinatorially balanced in terms of 3-tuples. They also satisfy the properties of 3-packing designs. The efficiency factor of these designs is quite high as v increases, the efficiency increases.

Key words: Balanced incomplete block designs, Canonical efficiency factor, Mutually orthogonal latin squares, t-packing.

परिचय

अपूर्ण खण्ड अभिकल्पनाएं (IBD_s) कृषि परीक्षणों से उच्च परिशुद्धि सहित कम संसाधनों का उपयोग कर उपयोगी सूचनाएं प्राप्त करने में महत्वपूर्ण भूमिका निभाती है। सामान्यीकृत IBD_s से सांख्यिकीय अभिकल्पनाओं का एक महत्वपूर्ण परिवार बनता है जिसे t–अभिकल्पनाएं, t–(v, k, λ_t) द्वारा निरुपित जहाँ v–उपचारों की संख्या, k–खण्ड आकार व λ_t–खण्डों की संख्या जिसमें प्रत्येक खण्ड में v–उपचारो के t–टपल्स द्वारा निरुपित हैं। जब t=2 हो तो हम एक 2–अभिकल्पना

[1]ICAR-Indian Agricultural Statistics Research Institute, Pusa-110 012, New Delhi, India.
[2]Human Resource Development, ICAR, New Delhi-110 001, India.

Corresponding Author: Mohd Harun, ICAR-Indian Agricultural Statistics Research Institute, Pusa-110 012, New Delhi, India.
Email: mohd.harun@icar.gov.in

How to cite this article: Karmakar, S., Varghese, C., Jaggi, S., Harun, M. and Kumar, D. (2022). Partially Balanced 3-Designs using Mutually Orthogonal Latin Squares. Bhartiya Krishi Anusandhan Patrika. DOI: 10.18805/BKAP351.

Submitted: 09-08-2021 **Accepted:** 12-03-2022 **Online:** 12-04-2022

प्राप्त करते हैं जो कि एक संतुलित अपूर्ण खण्ड अभिकल्पना है। इसके आगे 3–अभिकल्पना (t=3 सहित) को द्विसंतुलित अपूर्ण खण्ड अभिकल्पना कहा जाता है।

अपूर्ण खण्ड अभिकल्पनाओं के अन्य परिवारों की तरह, t–अभिकल्पनाओं का सशक्त अनुप्रयोग वैज्ञानिक अनुसंधान के लगभग सभी क्षेत्रों में किया जाता है। जब किसी परीक्षण का केन्द्र बिन्दु ग्रेडिंग एवं उपचार उप–समुच्चयों के चयन में होता है तब पारंपरिक अभिकल्पनाओं के मुकाबले t–अभिकल्पनाओं को प्राथमिकता दी जाएगी क्योंकि उनमें t–टपल संतुलन की अतिरिक्त सुविधा होती है। उदाहरणार्थ, समेकित फसल प्रणाली अनुसंधान में, मुख्य सरोकार किसी विशिष्ट कृषि परिस्थितिक जोन हेतु t–अवयव फसल प्रणालियों के किसी निश्चित समुच्चय से सर्वश्रष्ठ संयोजन का चयन करना होगा। यहाँ पर t–संतुलित अभिकल्पना बेहतर होगी। इन अभिकल्पनाओं की संरचना सामान्यतः यूडेन अभिकल्पनाएं, सामान्यीकृत यूडेन अभिकल्पनाएं, हैडामर्ड आव्यूह व इसी प्रकार की प्रचलित अभिकल्पनाओं एवं विन्यास की अन्य प्रचलित श्रेणियों का उपयोग कर की जाती है।

झा इत्यादि (2018a, b) एवं वर्गीस (2020) ने समाधेयी एवं आंशिक संतुलित अपूर्ण खण्ड अभिकल्पनाओं की कई श्रेणियाँ बनाई हैं। हिदायत एवं कजेयामा (1980) व कजेयामा एवं हिदायत (1983) ने संयोजनात्मक दृष्टिकोण से t–अभिकल्पनाओं के साहित्य का सर्वेक्षण किया। डेविड (2017) ने कुछ समाधेयी t–अभिकल्पनाओं की संरचना की जिसमें BIB (संतुलित अपूर्ण खण्ड) अभिकल्पनाओं जो कि t–अभिकल्पनाएं ही हैं, की पहचान कर $t \geq 3$ एवं $\lambda_t \geq 1$ पर अधिक जोर दिया गया हैं। ट्रंग (2001, 2017, 2018, 2019) ने 3–अभिकल्पनाओं एवं समाधेयी 3–अभिकल्पनाओं की पुनरावृत्त संरचना उपलब्ध करवायी।

ऐसी परिस्थितियों में, जहां t–अभिकल्पनाएं नहीं होती हैं, वहां पर वैकल्पिक अभिकल्पनाएं जैसे कि t–पैकिंग अभिकल्पनाएं जो कि t–अभिकल्पनाओं का ही सामान्यीकरण है, को अपनाया जा सकता है। हार्टमैन (1986) व आसफ एवं शालाबी (1992) ने क्रमशः 4 व 5 खण्ड आकार वाली पैकिंग समस्याएं हल की। t–संतुलन प्राप्त करने के लिए हमें बड़ी संख्या में खण्डों एवं प्रतिकृतियों की आवश्यकता हो सकती है जो कि सदैव सुसंगत नहीं हो सकती है। t–पैकिंग अभिकल्पनाओं के गुण अच्छे प्रकार से ज्ञात नहीं हैं। आंशिक संतुलित 3–अभिकल्पनाओं की स्पष्ट चारित्रिक गुणों वाली एक श्रंखला यहां पर परिभाषित एवं संरचित की गई है।

मॉडल एवं परीक्षणात्मक विन्यास

खण्ड अभिकल्पनाओं हेतु प्रचलित स्थिर प्रभाव मॉडल का उपयोग, v उपचारों हेतु आंशिक संतुलित t–अभिकल्पनाओं हेतु परीक्षणात्मक मॉडल के रूप में किया जा सकता है:

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ijk};\ i = 1\ (1)\ v,\ j = 1\ (1)\ b$$

जहां पर y_{ijk}, i वे उपचार लेते हुए j–वें खण्ड के सदृश प्रेक्षण है, μ सामान्य माध्य प्रभाव है, τ_j, i–वा उपचार प्रभाव है, β_j, j–वा खण्ड प्रभाव है व ε_{ijk}, यादृच्छिक त्रृटि अवयव है जो iid N (0, $\sigma 2$) का पालन करता है। अब, संतुलित t–अभिकल्पनाएं, t–पैकिंग अभिकल्पनाएं एवं आंशिक संतुलित t–अभिकल्पनाएं परिभाषित की गई है।

संतुलित t–अभिकल्पना

v उपचारों हेतु अपूर्ण खण्ड अभिकल्पना (IBD) को संतुलित t–अभिकल्पना कहा जाता है यदि परीक्षण सामग्री को ($1<t<k<v$) आकार के b खण्डों में इस प्रकार विभक्त किया जाता है कि:

(1) प्रत्येक उपचार r खण्डों में मिलता है,

(2) उपचारों का प्रत्येक युग्म λ खण्डों में एकदम साथ आता है,

(3) स्पष्ट उपचारों को कोई t–उपसमुच्चय δ खण्डों में एकदम साथ–साथ दिखता है।

v, b, r, k, δ संख्याओं को अभिकल्पना का प्राचाल कहा जाता है।

टिप्पणी

यहां पर ध्यान दिया जा सकता है कि स्पष्ट उपचारों का कोई t–उपसमुच्चय δ खण्डों में साथ–साथ दिख रहे हैं। तो यह दर्शाता है कि स्पष्ट उपचारों का कोई निम्न क्रम उपसमुच्चय [2 से (t–1) तक] खण्डों की एक नियत संख्या (जो δ के = नहीं हो सकती) में साथ–साथ आ रही है। यह साधारणतः दर्शाता है कि संतुलित t–अभिकल्पना एक संतुलित (t–1) अभिकल्पना (किसी t>2 हेतु) भी है।

t–पैकिंग अभिकल्पना

t–पैकिंग अभिकल्पना में संतुलित t–अभिकल्पना की (i) शर्त समान रहती है। शर्त (iii) में स्पष्ट उपचारों के t–उपसमुच्चय अधिक से अधिक δ खण्डों में साथ–साथ होते है ढील दी जाती है। यह परिभाषा इस बात की गारंटी नहीं देती कि t–पैकिंग अभिकल्पना, (t–1) अभिकल्पना की शर्त संतुष्ट करे। t–पैकिंग अभिकल्पना के अन्य चारित्रिक गुणों को अभी खोजा जाना है।

आंशिक संतुलित t–अभिकल्पना

आंशिक संतुलित t–अभिकल्पना को और अधिक स्पष्टता से परिभाषित किया गया है। t–संतुलित अभिकल्पना की पहली शर्त के अतिरिक्त यह नीचे दी गई शर्तों को भी संतुष्ट करता है:

1) निम्न लिखित शर्तों को पूर्ण करते हुए उपचारों के मध्य एक गूढ़ संबंध होता है:

• दो उपचार या तो प्रथम, द्वितीय अथवा m वे साहचर्य हैं। साहचर्य का संबंध समरूप होता है अर्थात यदि α उपचार β का iवा साहचर्य है तो β भी α (i = 1, 2, ... m) का iवा साहचर्य है।

• प्रत्येंक उपचार के एकदम ठीक n_i iवे साहचर्य हैं, और दिये गए कोई दो उपचार परस्पर iवे साहचर्य हैं, प्रथम के jवे साहचर्य के उभयनिष्ठ उपचारों की संख्या एवं द्वितीय के iवे साहचर्यों की संख्या P^i_{jl}(i,j,l = 1,2,3) है।

(2) दो उपचार जो कि परस्पर iवे साहचर्य हैं, λ_i खण्डों में एक दम ठीक साथ–साथ होते है।

(3) भिन्न उपचारों का कोई t–उपसमुच्चय δ_j खण्डों में साथ–साथ आता है।

टिप्पणी

यहां इस बात पर ध्यान दिया जा सकता है कि जिस प्रकार हम संतुलित t–अभिकल्पना को संतुलित अपूर्ण अभिकल्पना भी कहते है उसी प्रकार आंशिक संतुलित t–अभिकल्पना को भी आंशिक संतुलित अपूर्ण खण्ड अभिकल्पना कहा जा सकता है। इसके आगे, आंशिक संतुलित t–अभिकल्पनाएं सदैव इस अर्थ में t–पैकिंग अभिकल्पनाएं है कि भिन्न उपचारों का कोई t–उप समुच्चय अधिक से अधिक δ खण्डों में साथ–साथ हो सकता है किन्तु t–पैकिंग अभिकल्पनाएं सदैव आंशिक संतुलित t–अभिकल्पनाएं नहीं हो सकती हैं।

संरचना पद्धति

यहां पर आंशिक संतुलित 3–अभिकल्पनाओं की संरचना v($\geq$ 5) हेतु परस्पर लांबिक लैटिन वर्गों का उपयोग कर की जाती हैं। ये अभिकल्पनाएं यद्यपि ट्रिपलेट्स के पदों में संयुक्त रूप से संतुलित नहीं होती हैं, परीक्षणकर्ताओं में बढ़े हुए अनुप्रयोग प्रभाव के लिए उच्च दक्षता कारक वाली होती है। आंशिक संतुलित 3–अभिकल्पनाएं नीचे दिए जा रहे चरणों का उपयोग कर प्राप्त की जा सकती है।

प्रथम चरण

(v–1) प्रारम्भिक खण्ड लीजिए जिसमें प्रत्येक खण्ड का आकार v है और प्रथम प्रारम्भिक खण्ड के अवयव (1,2,3, ... v) की तरह हों।

द्वितीय चरण

शेष (v–2) प्रारम्भिक खण्डों की रचना इससे पूर्व वाले (mod v) प्रारम्भिक खण्डों के अवयवों में क्रमशः 0,1,2,..., (v–1) जोड़कर की जाती है।

तृतीय चरण

प्रत्येक प्रारम्भिक खण्ड को चक्रीय रूप में (mod v) उससे पहले वाले खण्ड के प्रत्येक अवयव में एक जोड़कर v खण्डों को उत्पन्न कर विकसित करें। इससे v कतार एवं v स्तम्भों वाले प्रत्येक परस्पर लांबिक लैटिन वर्गों के पूर्ण समुच्चय की रंचना होती है।

चतुर्थ चरण

(v–1) परस्पर लांबिक लैटिन वर्गों में से कोई $\left(\frac{v-1}{2}\right)$ से परस्पर लांबिक लैटिन वर्गों का चयन कीजिए और उन्हें एक दूसरे के ऊपर पास–पास रखिए, केवल पहले $\left(\frac{v+1}{2}\right)$ स्तम्भों (खण्ड आकार) को बचाकर। इस प्रकार निर्मित अभिकल्पना v, b = $\frac{v(v-1)}{2}$, r = $\frac{(v^2-1)}{4}$, k = $\frac{(v+1)}{2}$, $\lambda = \frac{(v^2-1)}{8}$ प्राचालों सहित आंशिक संतुलित 3–अभिकल्पना है।

इस प्रकार प्राप्त की गई आंशिक संतुलित 3–अभिकल्पना मूल उपचार व्यतिरेंकों की गणना हेतु संतुलित है। अभिकल्पनाओं की इस श्रेणी हेतु उपचार प्रभावों से संबंधित SAS कोड (लेखकों के पास उपलब्ध) का उपयोग कर उत्पन्न की गई सूचना आव्यूह (v–आव्यूह) $C = C_O I_v - C_1 J_v$ है।

यहाँ पर I_v, v क्रम की समरूपता आव्यूह है, J_v, v क्रम की इकाई आव्यूह है जो $C_O = \frac{v(v-1)}{4}$ एवं $C_I = -\frac{(v-1)}{4}$ सहित हैं। इसके आगे यह भी देखा जा सकता है कि यह अभिकल्पना 3–पैकिंग अभिकल्पना भी है।

उदाहरण

v=7 लेकर, हमारे पास (v–1)=6 परस्पर लांबिक लैटिन वर्गों का एक पूरा समुच्चय होगा जिसे 6 प्रारम्भिक खण्डों v तक चक्रीय रुप से विकसित कर प्राप्त किया गया है अर्थात आवश्यकतानुसार प्रत्येक खण्ड आकार v=7 का mod v 7 लेकर।

6 संभव लांबिक लैटिन वर्गों में से पहले $\left(\frac{v-1}{2}\right) = 3$ परस्पर लांबिक लैटिन वर्गों का चयन v=7 स्तम्भों में से $\left(\frac{v+1}{2}\right) = 3$ स्तम्भों (खण्ड आकार) को शेष रखकर करें। इन 3 चयनित

लांबिक लैटिन वर्गों, जिनमें आरंभिक खण्ड अवयव इस प्रकार हैं: (1,2,3,4), (1,3,5,7) एवं (1,4,7,3), एक दूसरे के ऊपर पास–पास रखते हुए एक आंशिक संतुलित 3–अभिकल्पना जिसमें प्रत्येक ट्रिप्लेट दो या तीन बार आता है इस प्रकार की जाती है:

खण्ड	उपचार			
B1	1	2	3	4
B2	2	3	4	5
B3	3	4	5	6
B4	4	5	6	7
B5	5	6	7	1
B6	6	7	1	2
B7	7	1	2	3
B8	1	3	5	7
B9	2	4	6	1
B10	3	5	7	2
B12	5	7	2	4
B13	6	1	3	5
B14	7	2	4	6
B15	1	4	7	3
B16	2	5	1	4
B17	3	6	2	5
B18	4	7	3	6
B19	5	1	4	7
B20	6	2	5	1
B21	7	3	6	2

प्राप्त अभिकल्पना के प्राचाल v=7, b=21, r=12, k=4, λ=6, δ1=2, δ2=3 हैं। जैसे कि ट्रिप्लेट्स अधिकतर 3 बार आ रहे हैं, तो इस प्रकार प्राप्त आंशिक संतुलित 3–अभिकल्पना, v=7, k=4 एवं δ=3, सहित एक 3–पैकिंग अभिकल्पना भी है।

प्राप्त अभिकल्पनाओं के अन्य चारित्रिक गुणों का अध्ययन विस्तार से करने के लिय SAS का PROC IML में एक प्रोग्रेम लिखा गया है जो एक लांबिक अभिकल्पना की तुलना में प्रस्तावित आंशिक संतुलित 3–अभिकल्पनाओं के C– आव्यूह एवं प्रामाणिक दक्षता की गणना, समान प्रसरण मानते हुए समान संख्या के उपचारों एवं प्रतिकृतियों के साथ करता है।

उदाहरणार्थ, C– आव्यूह की गणना इस प्रकार की जाती है: $C=10.5\ I_7 - 1.5\ J_7$, यह इंगित करते हुए कि यह एक 2–संतुलित अभिकल्पना है। अन्तिम अभिकल्पना का प्रामाणिक दक्षता गुणक 88% जो कि अत्यधिक है।

सारणी: आंशिक संतुलित t–अभिकल्पनाओं की सूची हैं।

v	b	r	k	λ	δ		प्रामाणिक दक्षतागुणक
					δ_1	δ_2	
5	10	6	3	3	1		83
7	21	12	4	6	2	3	88
11	55	30	6	15	6	7	92
13	78	42	7	21	9	10	93
17	136	72	9	36	16	17	94
19	171	90	10	45	20	21	95

अभिकल्पनाओं की सूची

उपरोक्त संरचना पद्धति का उपयोग करते हुए v < 20 हेतु अभिकल्पनाओं की एक सूची तैयार की गई है जो सारणी में दी गई है। विकसित SAS कोड़ का उपयोग करते हुए C–आव्यूह एवं प्रामाणिक दक्षता गुणकों की गणना की गई है।

इस प्रकार प्राप्त आंशिक संतुलित 3–अभिकल्पनाओं के प्रामाणिक दक्षता गुणक अत्याधिक है। इसके अतिरिक्त जैसे–जैसे v बढ़ता है वैसे–वैसे अभिकल्पनाओं की दक्षता बढ़ती है।

निष्कर्ष

परस्पर लांबिक लैटिन वर्गे का उपयोग करते हुए आंशिक संतुलित 3–अभिकल्पनाओं की नई श्रृंखला की संरचना करना सरल एवं सस्ता है। इन अभिकल्पनाओं के दक्षता गुणक अत्याधिक हैं और उनका उपयोग लोकप्रिय 3–अभिकल्पनाओं अथवा 3–पैकिंग अभिकल्पनाओं के बेहतर विकल्प के रूप में किया जा सकता है।

संदर्भ

Assaf, A.M. and Shalaby, N. (1992). Packing design with block size 5 and indices 8, 12, 15. Journal of Combinatorial Theory. 59: 23-30.

David, A. (2017). Construction of some resolvable t-designs. Science Journal of Applied Mathematics and Statistics. 5(1): 49-53.

Hartman, A. (1986). On small packing and covering designs with block size 4. Discrete Mathematics. 59: 275-281.

Hedayat, A. and Kageyama, S. (1980). The Family of t-designs-Part I. Journal of Statistical Planning and Inference. 4: 173-212.

Jha, A., Varghese, C., Jaggi, S., Harun, M. and Kumar, D. (2018a). A new series of resolvable PBIB (2) designs in unequal block sizes with three replicates, Bhartiya Krishi Anusandhan Patrika. 33(1): 161-164.

Jha, A., Varghese, C., Jaggi, S., Harun, M., Kumar, D. (2018b). Resolvable block designs balanced for non-directional neighbour effects. Bhartiya Krishi Anusandhan Patrika. 33(2): 113-115.

Kageyama, S. and Hedayat, A. (1983). The Family of t-designs-Part II. Journal of Statistical Planning and Inference. 7: 257-287.

Trung, T.V. (2001). Recursive constructions for 3-designs and resolvable 3-designs. Journal of Statistical Planning and Inference. 95: 341-358.

Trung, T.V. (2017). Simple t-designs: A recursive construction for arbitrary t. Designs, Codes and Cryptography. 83(3): 493-502.

Trung, T.V. (2018). A recursive construction for simple t-designs using resolutions. Designs, Codes and Cryptography. 86(6): 1185-1200.

Trung, T.V. (2019). Recursive constructions for s-resolvable t-designs. Design, Codes and Cryptography. 87: 2835-2845.

Varghese, C., Jaggi, S., Harun, M., Kumar, D. (2020). Three-associate class partially balanced incomplete block designs through kronecker product. Bhartiya Krishi Anusandhan Patrika. 35(1 and 2): 102-105.