दो प्लॉट प्रति खंण्ड में रैखिक प्रचलन–मुक्त अभिकल्पनाओं पर एक टिप्पणी

राहुल कुमार गुप्ता, अर्पण भौमिक*, सीमा जग्गी, मो. हारून,
सिनी वर्गीस, अनिंदिता दत्ता एंव देवेन्द्र कुमार

भा.कृ.अनु.प.–भारतीय कृषि सांख्यिकी अनुसंधान संस्थान, नई दिल्ली – 110012, भारत

सारांश

प्रस्तुत लेख में, हमने व्यवस्थित प्रचलन घटक के अंतर्गत खंण्ड (ब्लॉक) अभिकल्पनाओं के कुछ पहलुओं पर चर्चा की है। किसी खण्ड अभिकल्पना को प्रचलन–मुक्त होने के लिए आवश्यक एंव समुचित परिस्थिति को विशिष्ट रूप से दर्शाया गया है। दो प्लॉट प्रति खण्ड में रैखिक प्रचलन–मुक्त अभिकल्पनों की संरचना की पद्धति पर चर्चा की गई है। इस प्रकार की अभिकल्पनाओं के गुणों को अन्वेषित किया गया है।

A Note on Linear Trend Free Designs in Two Plots Per Block

Rahul Kumar Gupta, Arpan Bhowmik*, Seema Jaggi, Mohd. Harun, Cini Varghese, Anindita Datta and Devendra Kumar

ICAR- Indian Agricultural Statistic Research Institute, New Delhi-110012, India

ABSTRACT

In this article, we have discussed some aspects of block designs under systematic trend component. The necessary and sufficient condition for a block design to be trend free has been highlighted. A method of constructing linear trend free block designs in two plots per block have been discussed. The characterization properties of such designs have been investigated.

प्रस्तावना

वैज्ञानिक परीक्षणों की अभिकल्पना करते समय परीक्षण सामग्री की विषमता सर्वाधिक महत्वपूर्ण समस्या है जिसका ध्यान रखना चाहिए। जब विषमता केवल एक दिशा में हो तब खण्ड अभिकल्पनाएं सामान्यतः सर्वाधिक प्रयुक्त होने वाली अभिकल्पनाएं है। खण्ड अभिकल्पनाओं में, भिन्नता के ज्ञात स्रोत, उपचार और खण्ड हैं। कृषि परीक्षणों, विशेष रूप से खण्ड अभिकल्पना व्यवस्था के अन्तर्गत, भिन्नता के ज्ञात स्रोत के अतिरिक्त, अनुक्रिया परीक्षण इकाई की स्थान सबंधी स्थिति अर्थात व्यवस्थित प्रचलन प्रभावों पर भी निर्भर करती है। उदाहरणार्थ, जब किसी क्षेत्र में प्लॉट पट्टियो में होते हैं तो प्रायः ऐसा होता है कि एक ही पट्टी में निकटवर्ती

*Correspondence Email: arpan.stat@gmail.com
भा.कृ.अनु.प.– भारतीय कृषि सांख्यिकी अनुसंधान संस्थान, नई दिल्ली–110 012, भारत

प्लॉटस के अलग–अलग सैट्स की उर्वराप्रवणता अलग–अलग होती है। हरित गृह (गरम घर) परीक्षणों मे प्रचलन हो सकता है जहाँ ऊष्मा का स्रोत गृह के एक ओर होता है और परीक्षण इकाइयों को एक सीध में रखा जाता है। कुक्कुट–पालन परीक्षणों में, जहाँ ऊष्मा का स्रोत शेड के मध्य स्थित होता है और बड़े चूजे पिंजरों में होते हैं इस प्रकार की सभी परिस्थितियों में यह स्पष्ट है कि व्यवस्थित प्रचलन, परीक्षण सामग्री में अनुक्रिया को प्रभावित कर सकता है। इन परिस्थितियों के लिए अनुकूल अभिकल्पनाओं के बारे में सोचा जा सकता है जो प्रचलन प्रभावों के लांबिक अथवा लांबिक होने के समीप हैं। इस प्रकार की अभिकल्पनाएं प्रचलन प्रतिरोधक खण्ड अभिकल्पनाएं कहलाती हैं। यदि अभिकल्पनाएं प्रचलन प्रभावों के पूर्णतः लाम्बिक हैं तो उन्हें प्रचलन–मुक्त खण्ड अभिकल्पनाएं (ब्रैडले एवं ये, 1980) कहा जा सकता है। प्रचलन प्रतिरोधक अभिकल्पनाएं परीक्षण इकाईयों पर सामान्य प्रचलनों के निम्न–क्रम घटक प्रभावों को समाप्त करने देती हैं। परीक्षण अभिकल्पनाओं के क्षेत्र में प्रचलन घटक के विभिन्न पहलुओं से सरोकार रखने वाला बहुत कार्य साहित्य में उपलब्ध है [संदर्भ के लिए ब्रेडले एवं ये (1980), ये एवं ब्रेडले (1983), जेक्रौक्स इत्यादि (1997), मजूमदार एवं मार्टिन (2002), भौमिक (2013), भौमिक इत्यादि (2014, 2015), भौमिक इत्यादि (2017), भौमिक इत्यादि (2018a), भौमिक इत्यादि (2019b), इत्यादि]

यहाँ हमने व्यवस्थित प्रचलन घटक वाली खण्ड अभिकल्पनाओं के अंर्तगत परीक्षण परिस्थितियों की चर्चा की है। खण्ड अभिकल्पनाओं के प्रचलन–मुक्त होने के लिए आवश्यक एंव समुचित स्थिति को विशिष्ट रूप से दर्शाया गया है। प्रति खण्ड दो प्लॉट में रैखिक प्रचलन–मुक्त खण्ड अभिकल्पनाओं की एक श्रेणी प्राप्त की गई है और उनके गुणों का अध्ययन किया गया है।

परीक्षण विन्यास एंव मॉडल

v उपचार और प्रचलन घटक में सम्मिलित प्रत्येक 2 आकार के b खण्डों हेतु खण्ड अभिकल्पना विन्यास में नीचे दिए गए मॉडल को लीजिए (खण्ड के अर्न्तनिहित प्रचलन प्रभाव एक कोटि के रैखिक लाम्बिक बहुचर द्वारा दर्शाया गया है)

$$\mathbf{Y} = \mu\mathbf{1} + \boldsymbol{\Delta}'\boldsymbol{\tau} + \mathbf{D}'\boldsymbol{\beta} + \mathbf{Z}\boldsymbol{\rho} + \mathbf{e}$$

जहॉ Y प्रेक्षणों का $n\times1$ सदिश है, 1 इकाईयों का $n\times1$ सदिश है, Δ प्रेक्षणों का $n\times v$ आव्यूह बनाम उपचार प्रभाव है, τ उपचार प्रभावों का $v\times1$ सदिश है, D' प्रेक्षणों के $n\times b$ आयतन आव्यूह बनाम खण्ड प्रभाव है, β, खण्ड प्रभावों का $b\times1$ सदिश है, ρ प्रचलन प्रभावों को निरूपित कर रहा है। $n\times1$ क्रम का Z आव्यूह $Z=1_b \otimes F$ द्वारा दिए गये गुणांकों का आव्यूह है जहॉ F स्तम्भ लाम्बिक बहुचरों को दर्शाते हुए 2×1 आव्यूह है और e त्रुटियों का $n\times1$ सदिश

है जहाँ त्रुटियाँ शून्य माध्य और नियत प्रसरण के साथ सामान्य वितरण का पालन करता है। इस विन्यास को मानते हुए उपचार प्रभावों के आंकलन हेतु सूचना आव्यूह (C) इस प्रकार प्राप्त किया गया है।

$$\mathbf{C} = \mathbf{R} - \frac{1}{k}\mathbf{N}\mathbf{N}' - \frac{1}{b}\boldsymbol{\Delta}\mathbf{Z}\mathbf{Z}'\boldsymbol{\Delta}'$$

जहॉ R=ΔΔ' और N=ΔD'। उपरोक्त मॉडल के अंर्तगत कोई अभिकल्पना प्रचलन–मुक्त होगी यदि ΔZ=0 जो कि वास्तव में अभिकल्पना के प्रचलन–मुक्त होने के लिए आवश्यक एंव समुचित शर्त है (ब्रेडले एवं ये, 1980)। उपरोक्त पर आधारित, प्रचलन–मुक्त अभिकल्पनाओं को निम्नलिखित अनुसार परिभाषित किया जा सकता है।

परिभाषा: v उपचार, b खण्ड और खण्ड आकार 2 की खण्ड अभिकल्पना रैखिक प्रचलन–मुक्त खण्ड अभिकल्पना कहलाती है यदि प्रचलन घटक वाले खण्ड मॉडल का समायोजित उपचार वर्गों का योग तदनुरूप मुक्त घटक वाले सामान्य खण्ड मॉडल के अंर्तगत समायोजित उपचार वर्गो के योग के समान है।

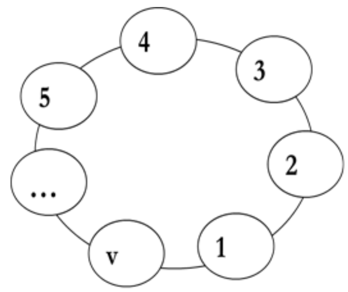
उपचार की किसी भी संख्या हेतु प्रत्येक दो आकार की प्रचलन–मुक्त खण्ड आभिकल्पनाओं की श्रृंखला प्राप्त करने की पद्धति इस प्रकार नीचे दी गई है।

प्रचलन–मुक्त खण्ड अभिकल्पनाओं की संरचना पद्धति

प्रत्येक 2 आकार की रैखिक प्रचलन–मुक्त खण्ड अभिकल्पना की संरचना हेतु पहले $v \times 1$ क्रम की प्राकृतिक संख्याओं के एक आरंभिक आव्यूह की संरचना कीजिए जहॉ पर v उपचारों की संख्या है। तब इस आव्यूह को आरंभिक स्तंभ मानते हुए और v मॉडयूल के एक और स्तंभ का विकास करते हुए विकसित आव्यूह की सभी कतारों को खण्ड मानते हुए प्रत्येक के 2 आकार की प्रचलन–मुक्त आंशिक संतुलित खण्ड अभिकल्पनाओं (TF-PBIB) की एक श्रृंखला प्राप्त की जा सकती है। विकसित अभिकल्पनाओं के शेष प्राचल v=b, r=2 होंगे। विकसित अभिकल्पनाओं के (कतारानुसार) खण्ड विषय–वस्तु

1	2
2	3
.	
.	
.	
v	1

रैखिक TF-PBIB अभिकल्पनाओं की श्रृंखला खण्ड अभिकल्पनाओं की सम–प्रतिकृतीय,उचित और संयुक्त वर्ग है और उपचारों की किसी भी संख्या के लिए प्राप्त किया जा सकता है। अभिकल्पना के वर्ग हेतु सहचर्य व्यवस्था, परिवर्तनीय वृत्तीय सहचर्य व्यवस्था है। यहाँ, किसी उपचार में सहभागियों की संख्या $\frac{v}{2}$ होगी यदि v सम है और सहभागियों की $\frac{v-1}{2}$ संख्या होगी यदि v विषम है। सहचर्य व्यवस्था इस प्रकार हैः



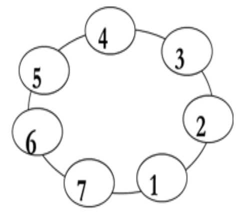
चित्र1ः v उपचारों वाली परिवर्तनीय वृत्तीय सहचर्य व्यवस्था

यहाँ दोनों ओर 1 की दूरी पर उपचार, प्रथम सहचर्य और 2 की दूरी पर उपचार, द्वितीय सहचर्य हैं आदि, आदि़।

उदाहरणः नीचे दिया जा रहा उदाहरण रैखिक TF-PBIB अभिकल्पना का है जिसमें उपरोक्त पद्वति के आधार पर प्रति ब्लॉक 2 प्लॉट है और प्राचल $v=7=b$, $r=2$ है। अभिकल्पना की प्रथम कतार सामान्यीकरण के बिना इकाई कोटि का लाम्बिक प्रचलन घटक दर्शाती है :

-1	1
1	2
2	3
3	4
4	5
5	6
6	7
7	1

उपरोक्त अभिकल्पना तीन सहचर्यों सहित परिवर्तनीय वृत्तीय सहचर्य व्यवस्था का पालन करती है। उपरोक्त TF-PB1B अभिकल्पना के लिए सहचर्य व्यवस्था इस प्रकार है :



चित्र 2: v उपचारों वाली परिवर्तनीय वृत्तीय सहचर्य व्यवस्था

यहाँ $n_1=n_2=n_3=2$ किसी भी उपचार के लिए जहाँ $i=1,2,3$ हेतु n_i अभिकल्पना में किसी विशेष उपचार के लिए प्रथम, द्वितीय और तृतीय सहचर्य की संख्या है।

सारणी 1, चित्र 2, में दी गई सहचर्य व्यवस्था पर आधारित उपरोक्त अभिकल्पना के लिए प्रत्येक उपचार हेतु प्रथम, द्वितीय एवं तृतीय सहचर्यों को विशेष रूप से दर्शाती है ।

सारणी 1 : उदाहरण में अभिकल्पना हेतु सभी उपचारों के सहचर्य

उपचार	प्रथम सहचर्य	द्वितीय सहचर्य	तृतीय सहचर्य
1	2, 7	3, 6	4, 5
2	1, 3	4, 7	5, 6
3	2, 4	1, 5	6, 7
4	3, 5	2, 6	1, 7
5	4, 6	3, 7	1, 2
6	5, 7	1, 4	2, 3
7	1, 6	2, 5	3, 4

संदर्भ

Bhowmik A. (2013). *Experimental designs involving treatments exhibiting interference effects*. Unpublished Ph.D. Thesis, IARI, New Delhi.

Bhowmik A., Jaggi S., Varghese C. and Varghese E. (2014). Trend free block designs balanced for interference effects from neighbouring experimental units. *Journal of Combinatorics, Information and System Sciences* **39** (1-4): 117-133.

Bhowmik A., Jaggi S., Varghese C. and Varghese E. (2015). Trend free second order neighbour balanced block designs. *Journal of Indian Statistical Association* **53** (1 and 2): 63-78.

Bhowmik A., Jaggi S., Varghese E. and Yadav S. K. (2017). Trend free design under two-way elimination of Heterogeneity. *RASHI* **2**(1): 34-38.

Bhowmik A., Varghese E., Jaggi S. and Yadav S. K. (2018a). Designs for animal experiments under two-way blocking structure in the presence of systematic trend. *Indian Journal of Animal Sciences*, **88 (1)**, 121–124.

Bhowmik A., Jaggi S., Varghese E., Yadav S. K., Harun M., Varghese C., Datta A. and Singh U. (2018b). Trend free designs under two source of heterogeneity useful for animal experiments. *Bhartiya Krishi Anusandhan Patrika*, **33(3)**, 200-202.

Bradley R. A. and Yeh C. M. (1980). Trend-free block designs: theory. *Annals of Statistics,* **8**: 883-893.

Jacroux M., Majumdar D. and Shah K. R. (1995). Efficient block designs in the presence of trends. *Statistica Sinica*, **5**, 605-615.

Majumdar D. and Martin R. J. (2002). Finding optimal designs in the presence of trends. *Journal of Statistical Planning and Inference* **106**: 177-190.

Yeh C. M. and Bradley R. A. (1983). Trend-free block designs: existence and construction results. *Communication in Statistics-Theory and Methods,* **12**(1): 1-24.